

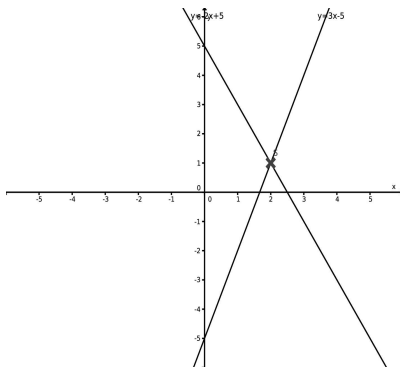
2.4 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme können aus beliebig viele Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten bestehen. Für die Abschlussprüfung reicht es aus, wenn man sich mit der einfachsten Variante mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten beschäftigt. Geometrisch gesehen handelt es sich bei 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten um 2 Geradengleichungen (2 lineare Funktionen). Ziel ist es den Schnittpunkt dieser beiden Geraden zu finden.

Es gibt insgesamt 4 Arten solche Gleichungssysteme zu lösen. Dabei sind alle 4 Arten gleichwertig und führen (bei richtiger Durchführung) zum gleichen Ergebnis. Um dies zu demonstrieren werde ich alle 4 Arten an dem System
$$\begin{array}{l} I \ y = 3x - 5 \\ II \ y = -2x + 5 \end{array}$$
 vorführen.

Graphische Lösung:

Wie oben beschrieben kann man die beiden Gleichungen als Funktionsgleichungen von linearen Funktionen (also Geradengleichungen) auffassen. Da es sich bei der Lösung um die Suche nach einem Schnittpunkt handelt, zeichnet man beide Geraden in ein Koordinatensystem und liest den Schnittpunkt ab. Diese Methode ist in der Regel fehlerbehaftet, da man nie so genau zeichnen und ablesen kann.



Der Schnittpunkt lautet $S(2/1)$. Damit ist die Lösung des Gleichungssystems $x=2$ und $y=1$.

Gleichsetzungsverfahren:

Da der Schnittpunkt gesucht wird, muss sowohl x als auch y in der ersten und zweiten Gleichung den gleichen Wert haben. Wenn also beide Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst sind, kann man die beiden Gleichungen gleich setzen, denn es gilt $y=y$ (auf der rechten Seite setzt man nun y aus Gleichung I und auf der linken y aus Gleichung II ein):

$$\begin{array}{l} I \quad y=3x-5 \\ II \quad y=-2x+5 \end{array}$$

Gleichsetzen von I und II: $I=II$

$$\begin{array}{rcl} 3x-5 & = & -2x+5 \quad | +2x \\ 5x-5 & = & 5 \quad | +5 \\ 5x & = & 10 \quad | :5 \\ \underline{x} & = & \underline{2} \end{array}$$

Jetzt fehlt noch der y-Wert. Wir setzen $x=2$ also in eine beliebige der beiden Ausgangsgleichungen ein:

$$\begin{array}{l} \text{Setze } x=2 \text{ in I ein:} \\ y=3 \cdot 2 - 5 \\ \underline{y=1} \\ \Rightarrow \underline{\underline{S(2/1)}} \end{array}$$

Der Schnittpunkt und damit die Lösung lautet also ebenfalls $S(2/1)$.

Einsetzungsverfahren:

Beim Einsetzungsverfahren wird ebenfalls ausgenutzt, dass die Variablen gleich sein müssen. Hier muss eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst werden und dann in die zweite Gleichung eingesetzt werden (wenn man also nach x auflöst, muss die andere Seite dieser Gleichung anstelle von x in die zweite Gleichung geschrieben werden). Bei unserem Beispiel läuft dies direkt auf die

gleiche Lösung wie beim Gleichsetzungsverfahren hinaus, da bereits beide Gleichungen nach y aufgelöst sind. Daher löse ich Gleichung I zur Veranschaulichung nach x auf:

$$I \ y = 3x - 5 \quad | +5$$

$$II \ y = -2x + 5$$

$$I \ y + 5 = 3x \quad | :3$$

$$II \ y = -2x + 5$$

$$I \ \frac{1}{3} \cdot y + \frac{5}{3} = x$$

$$II \ y = -2x + 5$$

Damit ist I aufgelöst und wird in II eingesetzt:

Setze I in II ein:

$$y = -2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot y + \frac{5}{3} \right) + 5$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot y - \frac{10}{3} + 5$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot y - \frac{5}{3} \quad | + \frac{2}{3} \cdot y$$

$$\frac{5}{3} \cdot y = \frac{5}{3} \quad | : \frac{5}{3}$$

$$\underline{y = 1}$$

Auch hier muss noch x ausgerechnet werden:

Setze $y = 1$ in I ein:

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{5}{3} = x$$

$$\frac{6}{3} = x$$

$$\underline{2 = x}$$

Damit ist die Lösung erneut der Schnittpunkt S(2/1).

Additionsverfahren:

Beim Additionsverfahren (Subtraktionsverfahren ist identisch) werden die beiden Gleichungen so addiert (subtrahiert), dass eine Variable „verschwindet“. Dazu muss in der ersten und zweiten Gleichung der Vorfaktor von x oder y identisch aber mit unterschiedlichem Vorzeichen (beim Subtraktionsverfahren gleiches Vorzeichen) sein. Dies geschieht indem man die beiden Gleichungen einzeln mit jeweils einer Zahl so multipliziert oder auch dividiert, dass das gewünschte Ergebnis eintritt.

$$\begin{array}{rcl} I & y = 3x - 5 & | \cdot 2 \\ II & y = -2x + 5 & | \cdot 3 \\ \hline I & 2y = 6x - 10 & \\ + & II & 3y = -6x + 15 \\ \hline & 5y = 5 & | : 5 \\ & y = 1 & \end{array}$$

Auch hier erfolgt das Einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Setze } y = 1 \text{ in I ein:} & & \\ 1 & = 3x - 5 & | + 5 \\ 6 & = 3x & | : 3 \\ & x = 2 & \end{array}$$

Also haben wir auch hier den Schnittpunkt S(2/1) als Lösung.

Übungsaufgaben Gleichungssysteme

Aufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungssysteme!

$$\begin{array}{lll} I & 2x = 3y + 4 & I & 2y = 10x + 5 & I & y = x + 12 \\ II & -2x = 10y + 22 & II & 10y = 4x + 48 & II & x = 2y - 14 \end{array}$$

Aufgabe 2: In einem Hotel gibt es Einzel- und Doppelzimmer. Es hat insgesamt 32 Zimmer und 54 Betten.

Wie viele Einzel- und wie viele Doppelzimmer hat es?